

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 33

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $11 - 11 \cdot (8 - 16 : 2)$ este egal cu
- 5p 2. Zece caiete de același fel costă în total 40 de lei. Cinci dintre aceste caiete costă în total ... de lei.
- 5p 3. Suma numerelor întregi din intervalul $[-3, 4)$ este egală cu
- 5p 4. Rombul $ABCD$ are $AB = 2\sqrt{2}$ cm. Perimetrul acestui romb este egal cu ... cm.
- 5p 5. În *Figura 1* este reprezentată o prismă triunghiulară $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC . Unghiul dreptelor $A'C'$ și BC are măsura de ...°.

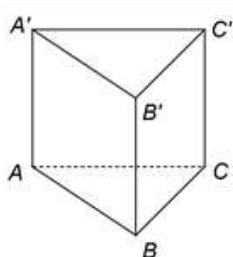
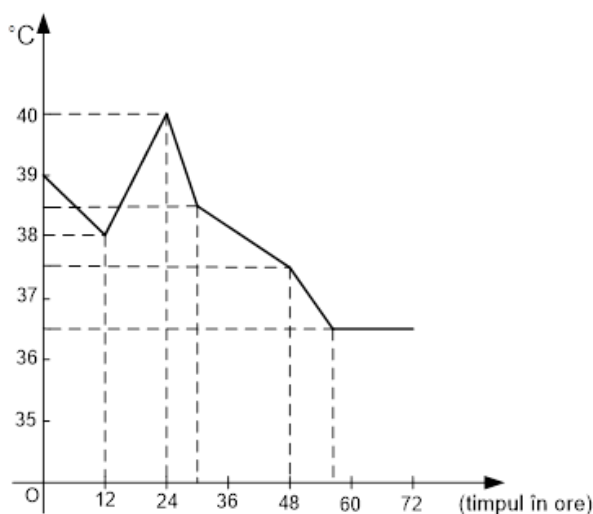


Figura 1

- 5p 6. În graficul de mai jos este înregistrată temperatura unui pacient pe parcursul a 72 de ore.



Conform informațiilor din grafic, temperatura înregistrată pentru acest pacient a scăzut sub $37,5^{\circ}\text{C}$ după ... de ore.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, o piramidă triunghiulară cu vârful V și baza triunghiul ABC .
- 5p 2. Suma a trei numere naturale nenule, distincte două câte două, este egală cu 14. Dacă unul dintre numere se dublează, suma lor devine 24. Arătați că produsul celor trei numere este egal cu 30.
- 5p 3. O ciupercă proaspătă cântărește 20g și conține 90% apă. Prin uscare, 50% din apa conținută de ciupercă se evaporă. Calculați cât cântărește ciuperca după uscare.

4. Se consideră numerele $a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}$ și $b = (\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}) + 6 - 2\sqrt{10}$.

5p a) Arătați că $a - \frac{1}{2} \cdot a = 1 - \frac{1}{2^6}$.

5p b) Arătați că $a < b$.

5p 5. Se consideră expresia $E(x) = 2(x+3)(x-3) - (x-1)^2 - 16$, unde x este număr real. Determinați numărul natural n pentru care $E(n)$ este număr natural prim.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În Figura 2 este reprezentat un triunghi echilateral ABC înscris în cercul de centru O și rază $OA = 4\sqrt{3}$ cm. Segmentul BQ este diametru în cercul de centru O și rază OA , iar M este punctul de intersecție a dreptei BQ cu tangenta la cerc în punctul A .

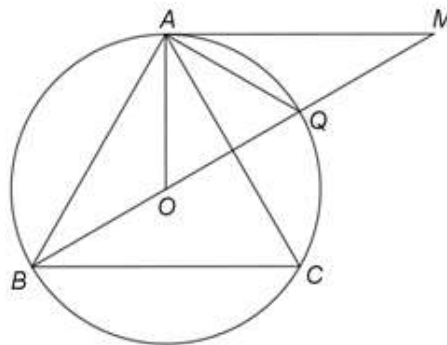


Figura 2

5p a) Arătați că aria cercului de centru O și rază OA este egală cu 48π cm².

5p b) Arătați că $AQ = 4\sqrt{3}$ cm.

5p c) Demonstrați că patrulaterul $ABCM$ este romb.

2. În Figura 3 este reprezentată o piramidă patrulateră $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$, $AB = 8$ cm și $VA = VB = VC = VD = 8$ cm. Punctul O este intersecția dreptelor AC și BD .

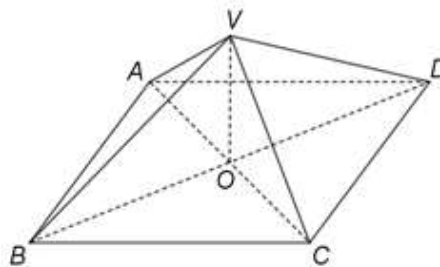


Figura 3

5p a) Arătați că perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu 32 cm.

5p b) Arătați că distanța de la punctul V la planul (ABC) este egală cu $\frac{AC}{2}$.

5p c) Determinați măsura unghiului dintre dreapta BM și planul (VDM) , unde punctul M este simetricul punctului B față de punctul C .

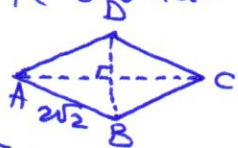
TESTUL 33 - REZOLVARE

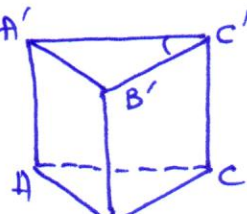
SUBIECTUL I: 1) $11 - 11 \cdot (8 - 16 : 2) = 11 - 11 \cdot (8 - 8) =$
 $= 11 - 11 \cdot 0 = 11 - 0 = 11.$

2) 10 caiete --- 40 lei $\Rightarrow$ 1 caiet --- 4 lei $\Rightarrow$ 5 caiete --- 20 lei.

3) $\mathbb{Z} \cap [-3; 4) = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ Suma lor este egală cu 0 deoarece sunt opuse două câte două.

4) ABCD romb $\Rightarrow P = 4 \cdot l = 4 \cdot AB = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ (cm)}$

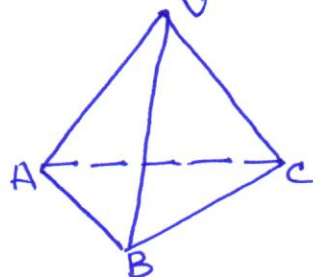


5)  $\left. \begin{array}{l} AC' \text{ și } BC: \text{ necoplanare} \\ BC \parallel B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow m(\widehat{AC'; BC}) =$
 $= m(\widehat{B'C'; AC'}) = m(\widehat{A'C'B'}) = 60^\circ$

6) După 48 de ore temperatura a scăzut sub $37,5^\circ \text{C}$.

SUBIECTUL al II-lea: 1)

2) $\left. \begin{array}{l} a+b+c = 14 \\ 2a+b+c = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow$



$\Rightarrow a = 24 - 14 = 10$

$10 + b + c = 14 \Rightarrow b + c = 4$

b, c distincte $\Rightarrow b = 1, c = 3$ sau $b = 3, c = 1$.

În ambele cazuri $abc = 10 \cdot 1 \cdot 3 = 30$, g.e.d.

3) Câtă apă conține ciuperca proaspătă?

(90% din 20 g) $= \frac{90}{100} \cdot 20 = 18 \text{ (g)}$.

Câtă apă se evaporă? (50% din 18 g) $= \frac{50}{100} \cdot 18 = 9 \text{ (g)}$.

Cât cântărește ciuperca uscată? $20 \text{ g} - 9 \text{ g} = 11 \text{ g}$.

R: 11 g.

4) a) $a = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}$

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^5} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}$$

$$a - \frac{1}{2}a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2^6} > 2 \cdot \text{e.d.}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad b &= (\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2}) + 6 - 2\sqrt{10} = \\
 &= 3 + \cancel{\sqrt{15}} - \cancel{\sqrt{6}} - \cancel{\sqrt{15}} - 5 + \sqrt{10} + \cancel{\sqrt{6}} + \sqrt{10} - 2 + 6 - 2\sqrt{10} = \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

Am arătat la (a) că $a - \frac{1}{2}a = 1 - \frac{1}{2^6} \Rightarrow a \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^6} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^6} \Leftrightarrow a = \left(1 - \frac{1}{2^6}\right) : \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \left(1 - \frac{1}{2^6}\right) \cdot 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a = 2 - \frac{2}{2^6} \Leftrightarrow a = 2 - \frac{1}{2^5}.$

$$a < b \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2^5} < 2 \text{ (Adevărat).}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad E(x) &= 2(x+3)(x-3) - (x-1)^2 - 16 = \\
 &= 2(x^2 - 9) - (x^2 - 2x + 1) - 16 = \\
 &= 2x^2 - 18 - x^2 + 2x - 1 - 16 = x^2 + 2x - 36 = (x+1)^2 - 36 = \\
 &= (x+1-6)(x+1+6) = (x-5)(x+7), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

metoda a $\overline{\text{II}}$ -a de descompunere:

$$\begin{aligned}
 E(x) &= x^2 + 2x - 35 = x^2 + 7x - 5x - 35 = \\
 &= x(x+7) - 5(x+7) = (x+7)(x-5)
 \end{aligned}$$

metoda a $\overline{\text{III}}$ -a de descompunere.

$$\begin{array}{l|l}
 a=1 \\
 b=2 \\
 c=-35
 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l}
 \Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4 \cdot 35 = 4 + 140 = 144 \geq 0 \\
 x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 12}{2}
 \end{array} \right.$$

$$x_1 = \frac{-2+12}{2} = \frac{10}{2} = 5; \quad x_2 = \frac{-2-12}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

$$x^2 + 2x - 35 = a(x - x_1)(x - x_2) = (x - 5)(x + 7).$$

Deci $E(x) = (x-5)(x+7)$ pt. orice $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $n \in \mathbb{N}$ $E(n) = (n-5)(n+7)$, produs de doi factori.

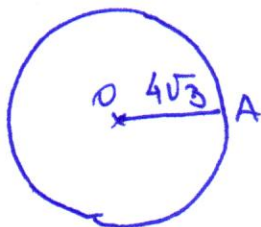
Un produs de doi factori este prim dacă unul din ei este egal cu 1, iar celălalt factor este nr. prim.

La noi $n-5=1 \Rightarrow n=6 \Rightarrow n+7=6+7=13$: prim

Deci pentru $n=6$ avem $E(n)=13$, care e nr. prim.

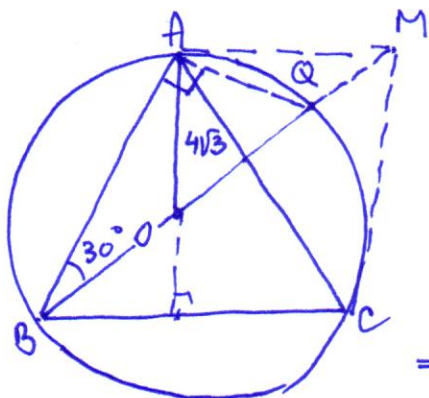
SUBIECTUL al III-lea:

1) a)



$$A_{\odot} = \pi R^2 = \pi \cdot OA^2 = \pi \cdot (4\sqrt{3})^2 = \pi \cdot 16 \cdot 3 = 48\pi \text{ (cm}^2\text{)}, \text{ g.e.d.}$$

b)



$\widehat{BAQ}$: unghi înscris în cerc
 $\widehat{BAQ}$ întinde diametrul $\Rightarrow m(\widehat{BAQ}) = 90^\circ$.

$\triangle ABQ$: dreptunghic în $\hat{A}$.

$\triangle ABC$: echilateral $\Rightarrow O$: centrul său $\Rightarrow$
 $\Rightarrow [BO$: bisectoare $\Rightarrow m(\widehat{ABQ}) = 30^\circ$.

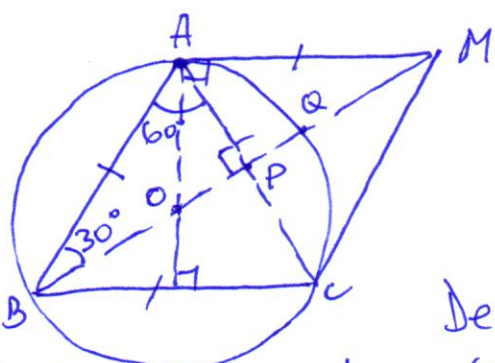
$$BQ = 2 \cdot OB = 2 \cdot AO = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

În $\triangle ABQ$ dreptunghic în $\hat{A}$, cu $m(\widehat{ABQ}) = 30^\circ$, cateta opusă unghiului de 30° , anume AQ , este jumătate din ipotenuza BQ . Deci $AQ = \frac{BQ}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$.

c) $OA \perp AM$, raza este perpendiculară pe tangentă în punctul de tangentă
 (1)

$OA \perp BC$, pt că $\triangle ABC$: echilateral
 (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \boxed{AM \parallel BC}$ (3) Notăm $BM \cap AC = \{P\}$.



În $\triangle APB$ avem $m(\widehat{BAP}) = 60^\circ = m(\widehat{BAC})$ și $m(\widehat{ABP}) = 30^\circ$.

$$\text{Deci } m(\widehat{APB}) = 180^\circ - [m(\widehat{BAP}) + m(\widehat{ABP})] = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ.$$

Deci $AP \perp BM$ și e înălțime în $\triangle ABM$.

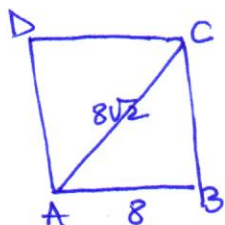
Pe de altă parte $m(\widehat{BAP}) = 60^\circ$

$$m(\widehat{PAM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AC}) = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ \left. \vphantom{\begin{matrix} m(\widehat{BAP}) = 60^\circ \\ m(\widehat{PAM}) = 60^\circ \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} m(\widehat{BAP}) = 60^\circ \\ m(\widehat{PAM}) = 60^\circ \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \text{AP : bisectoarea} \\ \text{lui } \widehat{BAM} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle ABM$: isoscel cu $AB = AM$ $\Rightarrow \boxed{AM = BC}$ (4)
 $AB = BC$

Din (3) și (4) $\Rightarrow ABCM$: paralelogram $\Rightarrow ABCM$: romb, g.e.d.

2) a)



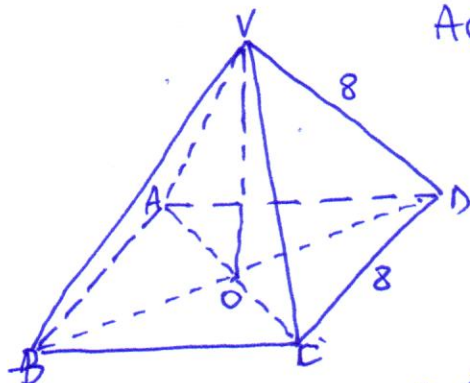
$$P_{\square} = 4 \cdot l$$

$$P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 8 = 32 \text{ cm.}$$

b)

Diagonala pătratului $d = a\sqrt{2}$ deci

$$AC = 8\sqrt{2} \text{ cm.}$$

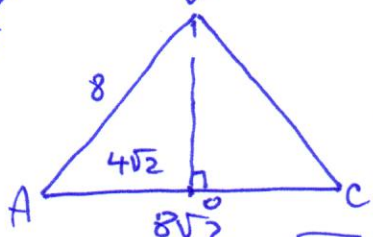


ABCD pătrat
 $VA = VB = VC = VD \Rightarrow VABCD$ este patrulateră regulată $\Rightarrow$

$\Rightarrow VO \perp (ABC)$ și $d(V; (ABC)) = VO$.

$$AO = \frac{AC}{2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

T.P. în $\triangle VOA$:

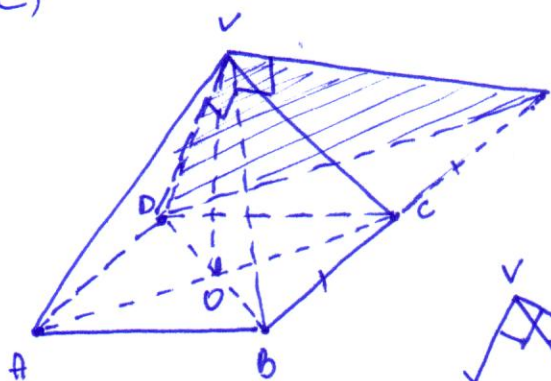


$$VO^2 = VA^2 - OA^2 = 8^2 - (4\sqrt{2})^2 =$$

$$= 64 - 32 = 32 \Rightarrow VO = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)} = \frac{AC}{2}.$$

Deci $VO = \frac{AC}{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$, g. e. d.

c)



Măsura unghiului format de o dreaptă cu un plan este egală cu măsura unghiului format de dreaptă cu proiecția ei pe plan

$\triangle VBC$: echilateral $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m(\widehat{VCM}) = 120^\circ$$

$$VC = CM = BC \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle CMV$: isoscel

$$\Rightarrow m(\widehat{CMV}) = m(\widehat{CVM}) = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 60^\circ : 2 = 30^\circ. \quad (1)$$

$$m(\widehat{BVM}) = m(\widehat{BVC}) + m(\widehat{CVM}) = 90^\circ, \text{ deci } \underline{VM \perp VB}$$

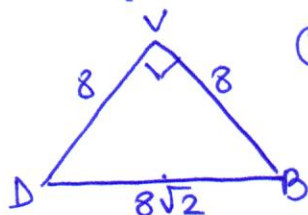
Cu R.T.P. în $\triangle VBD \Rightarrow \triangle VBD$ dreptunghic în V , deci

$$\underline{VD \perp VB}$$

$\Rightarrow VB \perp (VDM)$, fiind perpendiculară pe două drepte concurente din plan. Deci proiecția

dreptei BM pe (VDM) este VM și atunci $m\angle [BM; (VDM)] =$

$$= m\angle [BM; VM] = m(\widehat{BMV}) = m(\widehat{CMV}) = 30^\circ, \text{ vezi (1).}$$



EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 33

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	11	5p
2.	20	5p
3.	0	5p
4.	$8\sqrt{2}$	5p
5.	60	5p
6.	48	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează piramida triunghiulară Notează piramida triunghiulară cu vârful V și baza triunghiul ABC	4p 1p
2.	$a + b + c = 14$ și $2a + b + c = 24$, deci $a = 10$, unde a , b și c sunt cele trei numere Numerele naturale b și c sunt nenule, distincte și au suma 4, deci $bc = 1 \cdot 3 = 3 \Rightarrow abc = 30$	3p 2p
3.	Cantitatea de apă din ciuperca proaspătă este $\frac{90}{100} \cdot 20 = 18\text{g}$ Cum s-au evaporat $\frac{50}{100} \cdot 18 = 9\text{g}$, după uscare ciuperca cântărește $20 - 9 = 11\text{g}$	2p 3p
4.	a) $a - \frac{1}{2} \cdot a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} \right) =$ $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} = 1 - \frac{1}{2^6}$	3p 2p
	b) $b = (\sqrt{3} - (\sqrt{5} - \sqrt{2}))(\sqrt{3} + (\sqrt{5} - \sqrt{2})) + 6 - 2\sqrt{10} = 3 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + 6 - 2\sqrt{10} =$ $= 9 - (5 - 2\sqrt{10} + 2) - 2\sqrt{10} = 2$ $\frac{1}{2} \cdot a = 1 - \frac{1}{2^6} \Rightarrow a = 2 - \frac{1}{2^5} < 2 = b$	3p 2p
5.	$E(x) = 2(x^2 - 9) - (x^2 - 2x + 1) - 16 = 2x^2 - 18 - x^2 + 2x - 1 - 16 = x^2 + 2x - 35$, pentru orice număr real x $E(n) = (n - 5)(n + 7)$ și, cum n este număr natural, $E(n)$ este număr natural prim dacă $n - 5 = 1$, deci $n = 6$, care convine deoarece $E(6) = 13$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\mathcal{A}_{C(O,OA)} = \pi \cdot OA^2 =$ $= \pi \cdot (4\sqrt{3})^2 = 48\pi \text{ cm}^2$	3p 2p
----	---	----------

	b) BQ este diametru, deci $BQ = 8\sqrt{3}$ cm și $m(\angle BAQ) = 90^\circ$	2p
	$\triangle ABC$ este echilateral, deci $AB = OA\sqrt{3}$ cm = 12 cm, deci $AQ = \sqrt{BQ^2 - AB^2} = 4\sqrt{3}$ cm	3p
	c) $m(\angle BAO) = 30^\circ$ și $OA \perp AM$, deci $m(\angle BAM) = 120^\circ$ și, cum $m(\angle ABO) = 30^\circ$, obținem $m(\angle AMB) = 30^\circ$, deci $\triangle ABM$ este isoscel	2p
	$OA \perp AM$ și $AO \perp BC \Rightarrow AM \parallel BC$ și, cum $AM = AB = BC$, obținem că $ABCM$ este romb	3p
2.	a) $P_{ABCD} = 4AB =$ $= 4 \cdot 8 = 32$ cm	3p 2p
	b) $ABCD$ este pătrat, deci $AO = BO = CO = DO$, de unde obținem că VO este mediană în triunghiurile isoscele VAC și VBD , deci $VO \perp AC$ și $VO \perp BD$ și, cum $\{O\} = AC \cap BD$, obținem că $VO \perp (ABC)$, deci $d(V, (ABC)) = VO$	3p
	$\triangle VOA$ este dreptunghic, $VA = 8$ cm, $OA = 4\sqrt{2}$ cm, deci $VO = \sqrt{64 - 32} = 4\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow VO = \frac{AC}{2}$	2p
	c) $\triangle VBC$ echilateral, deci $CV = CB = CM \Rightarrow \triangle VBM$ este dreptunghic, deci $VB \perp VM$ și, cum $OB = OD = OV \Rightarrow \triangle VBD$ este dreptunghic, deci $VB \perp VD$ și, cum $\{V\} = VM \cap VD$, obținem $BV \perp (VDM)$, deci $m(\angle(BM, (VDM))) = m(\angle(BM, VM)) = m(\angle BMV)$	3p
	$\triangle VBM$ este dreptunghic în V și $m(\angle VBM) = 60^\circ$, deci $m(\angle BMV) = 30^\circ$	2p